54. Österreichische Mathematik-Olympiade
Lösungen zum Junior-Kurswettbewerb / 28.4.2023
BG Vöcklabruck und BRG Schloss Wagrain

1. Gegeben ist folgende Gleichung:

$$(x-6)\cdot(x+6)=p\cdot x-54$$

Bestimme alle Werte von *p*, so dass die Gleichung zwei ganzzahlige Lösungen hat.
Gib zu jedem dieser *p*–Werte die Lösungsmenge an.

LÖSUNG 1: (Idee der Trinomzerlegung)
Zunächst formen wir um:

$$(x-6)\cdot(x+6)=p\cdot x-54 \Leftrightarrow x^2-36=p\cdot x-54 \Leftrightarrow x^2-p\cdot x+18=0$$

Eine quadratische Gleichung mit Lösungsmenge $L=\{a,b\}$ ist darstellbar in der Form

$$(x-a)\cdot(x-b)=0 \Leftrightarrow x^2-(a+b)\cdot x+a\cdot b=0$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $a\cdot b=18$ und $a+b=p$

Mit den zwölf Teilern von 18 erhalten wir sechs Möglichkeiten:

p	–19	–11	–9	+9	+11	+19
L	{–18, –1}	{–9, –2}	{–6, –3}	{+3,+6}	{+2,+9}	{+1,+18}

LÖSUNG 2: (Auflösung nach *p*)
Zunächst formen wir wieder um:

$$(x-6)\cdot(x+6)=p\cdot x-54 \Leftrightarrow x^2-36=p\cdot x-54 \Leftrightarrow x^2+18=p\cdot x$$

Da *x* = 0 keine Lösung ist, können wir durch *x* dividieren und erhalten: $x+\frac{18}{x}=p$

Wenn *x* ganzzahlig ist, ist auch *p* nur dann ganzzahlig, wenn *x* ein Teiler von 18 ist.

Die zwölf Teiler von 18 ergeben jeweils zwei Mal den gleichen *p*–Wert:

$$18+\frac{18}{18}=1+\frac{18}{1}=19 \qquad -18+\frac{18}{-18}=-1+\frac{18}{-1}=-19$$

$$9+\frac{18}{9}=2+\frac{18}{2}=11 \qquad -9+\frac{18}{-9}=-2+\frac{18}{-2}=-11$$

$$6+\frac{18}{6}=3+\frac{18}{3}=9 \qquad -6+\frac{18}{-6}=-3+\frac{18}{-3}=-9$$

Wir erhalten wiederum:

p	–19	–11	–9	+9	+11	+19
L	{–18, –1}	{–9, –2}	{–6, –3}	{+3,+6}	{+2,+9}	{+1,+18}

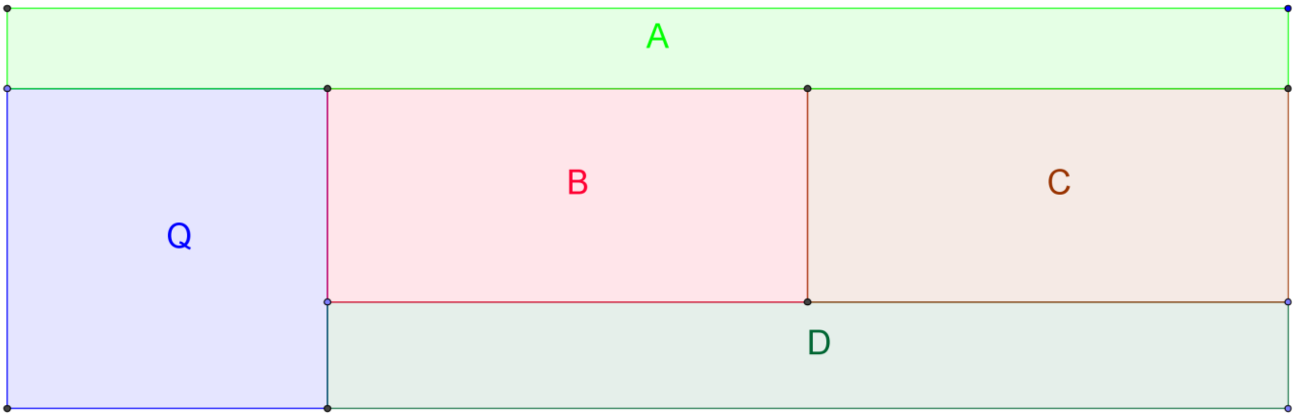
2. Folgendes Fliesenmuster besteht aus fünf Fliesen.

Die Fliese Q ist ein Quadrat, und die Fliesen A, B, C,A, B, C und D sind rechteckig.

Alle fünf Fliesen haben den gleichen Flächeninhalt.

Das Fliesenmuster hat eine Länge von 48 cm.

Bestimme von allen fünf Fliesen Länge, Breite und Umfang.



LÖSUNG 1: (mit Variable)

Sei x die Breite von D, dann haben B und C die Breite $2x$ (wegen halber Länge von D)

Die Seitenlänge von Q ist daher $3x$ und der Flächeninhalt von Q wird zu $9x^2$.

Die Länge von D wird zu $9x$ und wir erhalten: $48 = 3x + 9x = 12x$, also $x = 4$ cm.

Nun können wir alle Daten ermitteln:

Fliese	Q	A	B, C	D
Länge	12 cm	48 cm	18 cm	36 cm
Breite	12 cm	3 cm	8 cm	4 cm
Umfang	48 cm	102 cm	52 cm	80 cm

Bemerkung 1: Man sieht, dass das Quadrat den geringsten Umfang hat.

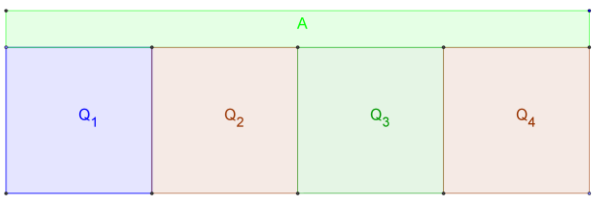
Bemerkung 2: Es gibt viele andere Wege, mit Variablen die Aufgabe zu lösen.

Bemerkung 3: Der Flächeninhalt ist $12^2 = 144$ cm^2. Die Vermutung einiger Schüler/innen, dass dieser eine Quadratzahl sein müsse, ist nicht richtig. Nur wenn wie in der Angabe die Länge von A durch 4 teilbar ist, wird die Fläche zu einer Quadratzahl.

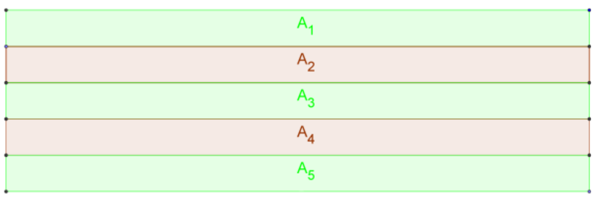
Korrekt ist: 16 Mal der Flächeninhalt ist immer eine Quadratzahl.

LÖSUNG 2: (Andere Fliesenmuster = Parkettierungen)

Da alle Fliesen gleichen Flächeninhalt haben, könnte man das gesamte Rechteck auch auf folgende Arten belegen:



Dieses Bild ergibt:
Die Quadratseite ist ein Viertel der Länge von A.



Dieses Bild ergibt:
Die Breite von A ist ein Viertel der Quadratseite

Ersetzt man B und C durch zwei D-Fliesen, rthält man die Breite von D als ein Drittel der Quadratseite.

3. a, b, c seien positive reelle Zahlen. Zeige, dass:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Wann gilt Gleichheit in der Ungleichung?

LÖSUNG 1 (positive Zahl + Kehrwert einer positiven Zahl ist mindestens 2)

Hilfssatz: Für jede positive reelle Zahl x gilt $x+\frac{1}{x}\geq 2$ mit Gleichheit für $x = 1$.

Beweis1: $x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

Beweis2: AM-GM-Ungleichung: $\frac{x+1/x}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{1}=1$ mit Gleichheit für $x=\frac{1}{x}$, also $x = 1$

Wenn wir ausmultiplizieren, erhalten wir:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\geq 9$$

Weil $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}=1$, ist dies äquivalent zu $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 6$

Wegen des Hilfssatzes ist jede Klammer mindestens 2.

Gleichheit gilt, wenn jeder Bruch 1 ist, also $a = b = c$.

LÖSUNG 2 (AM-GM-Ungleichung)

Es gilt für drei positive Zahlen: $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}$ mit Gleichheit für $a = b = c$.

Setzen wir statt a, b, c die Kehrwerte ein, erhalten wir:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

Multiplizieren wir die beiden Ungleichungen, erhalten wir:

$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9$, was zu zeigen war

LÖSUNG 2' (Zuerst nennerfrei machen und dann wieder zwei Mal AM-GM-Ungleichung)

Multipliziert man mit $abc > 0$, erhält man: $(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab)\geq 9abc$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\cdot\left(\frac{bc+ac+ab}{3}\right)\geq\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=abc$$

LÖSUNG 3 (allgemeine Mittelungleichung – für Fortgeschrittenere?)

Die zu beweisende Aussage ist äquivalent zu Arithmetisches Mittel ≥ Harmonisches Mittel

$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ mit Gleichheit für $a = b = c$.

4. Es sei n eine ganze Zahl.

a) Zeige, dass: $3 \mid (n^3 - 4n)$

b) Zeige, dass falls n gerade ist, sogar folgendes gilt: $48 \mid (n^3 - 4n)$

a) LÖSUNG 1: (Faktorisierung)

$n^3 - 4n = n \cdot (n^2 - 4) = n \cdot (n-2) \cdot (n+2) = (n-2) \cdot n \cdot (n+2)$

Dies sind drei aufeinander folgende gerade oder aufeinander folgende ungerade Zahlen. Von diesen ist immer eine durch 3 teilbar. Konkret könnte man sogar angeben, welche:

- $n \equiv 0 \bmod 3 \Rightarrow 3 \mid n$
- $n \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow 3 \mid n+2$
- $n \equiv 2 \bmod 3 \Rightarrow 3 \mid n-2$

a) LÖSUNG 2: Beweis durch vollständige Induktion

1) Induktionsbasis: $n = 0$. $0^3 - 4 \cdot 0 = 0$ ist durch jede Zahl, also auch durch 3 teilbar.

2) Für alle natürlichen Zahlen zeigen wir, dass aus der Induktionsannahme $3 \mid (n^3 - 4n)$ die Induktionsbehauptung $3 \mid ((n+1)^3 - 4 \cdot (n+1))$ folgt. Dies gelingt folgendermaßen:

$(n+1)^3 - 4 \cdot (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 = (n^3 - 4n) + 3n^2 + 3n - 3$.

Der Ausdruck in der Klammer ist laut Induktionsannahme durch 3 teilbar, der Rest offensichtlich. Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gezeigt.

Dass sie auch für negative Zahlen gilt, kann man zum Beispiel mit der gleichen Induktionsannahme und einem Schluss von n auf $n-1$ zeigen (Idee Philipp Gutenthaler):

2') Für alle nicht positiven Zahlen zeigen wir, dass aus der Induktionsannahme $3 \mid (n^3 - 4n)$ die Induktionsbehauptung $3 \mid ((n-1)^3 - 4 \cdot (n-1))$ folgt. Dies gelingt folgendermaßen:

$(n-1)^3 - 4 \cdot (n-1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - 4n + 4 = (n^3 - 4n) - 3n^2 + 3n + 3$.

Der Ausdruck in der Klammer ist laut Induktionsannahme durch 3 teilbar, der Rest offensichtlich. Eine andere Möglichkeit: Setzen wir $n = -m$, so erhalten wir $n^3 - 4n = -m^3 + 4m = -(m^3 - 4m)$ den analogen Term mit umgekehrten Vorzeichen.

b) LÖSUNG 1: $48 = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 2^4$. Die Teilbarkeit durch 3 wurde in a) gezeigt. Es bleibt noch zu zeigen, dass der Primfaktor 2 mindestens vier Mal vorkommt. Wenn n gerade ist, dann ist $(n-2) \cdot n \cdot (n+2)$ das Produkt von drei aufeinander folgenden geraden Zahlen – also haben wir bereits die Vielfachheit 3 gezeigt. Da bereits bei zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen genau eine durch 4 teilbar ist, muss es bei drei aufeinander folgenden Zahlen mindestens eine sein (entweder die mittlere oder die beiden anderen). Damit ist gezeigt, dass die 2 mindestens vier Mal als Faktor auftreten muss.

b) LÖSUNG 2: Die Teilbarkeit durch 3 wurde in a) gezeigt.
Bei geraden Zahlen ist die Substitution $n = 2k$ (k eine ganze Zahl) oft sehr sinnvoll.
Wir erhalten: $n^3 - 4n = (2k)^3 - 4 \cdot 2k = 8k^3 - 8k = 8 \cdot (k^3 - k)$. Es genügt also zu zeigen, dass $k^3 - k$ gerade ist. Dies ist aber offensichtlich für gerade k. Bei ungeradem k haben wir die Differenz zweier ungerader zahlen, was wieder gerade ist.

Bemerkung: Weitere Lösungsvarianten mit Hilfe von Restklassen sind möglich.