54. ÖSTERREICHISCHE MATHEMATIK-OLYMPIADE
KURSWETTBEWERB FÜR FORTGESCHRITTENE
4. MÄRZ 2023 - LÖSUNGEN

1) Man ermittle die Primfaktorenzerlegung der Zahl

$$54! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \ldots \cdot 54.$$

Diese Zahl hat 72 Stellen. Wie viele Nullen hat sie am Ende?

LÖSUNG: Für die großen Primzahlen ist die Aufgabe sehr einfach.
Bei den kleineren bis 7 ist Vorsicht geboten.

Die Lösung lautet:

$$\underline{\underline{54! = 53\cdot 47\cdot 43\cdot 41\cdot 37\cdot 31\cdot 29\cdot 23^2\cdot 19^2\cdot 17^3\cdot 13^4\cdot 11^4\cdot 7^8\cdot 5^{12}\cdot 3^{26}\cdot 2^{50}}}$$

- Zu 7: Sieben Zahlen sind durch 7 teilbar, aber $49 = 7^2$, daher ist die Vielfachheit 8.
- Zu 5: Zehn Zahlen sind durch 5 teilbar, aber 25 und 50 enthalten den Faktor doppelt.
- Zu 3: 18 Zahlen sind durch 3 teilbar, sechs sogar durch 3^2 und zwei durch $27 = 3^3$.
- Zu 2: Analog: 27 Zahlen sind gerade, davon 13 sogar durch 4 teilbar, …

Dies lässt sich ähnlich wie bei Primfaktorenzerlegungen schematisch anschreiben:

54	:7
7	:7
1	:7
0	

54	:5
10	:5
2	:5
0	

54	:3
18	:3
6	:3
2	:3
0	

54	:2
27	:2
13	:2
6	:2
3	:2
1	:2
0	

Dieses Schema entspricht der allgemeinen Formel für die Vielfachheit eines Primfaktors p in n!

$$\eta_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

54! endet mit 12 Nullen, denn eine 0 entsteht durch Multiplikation sowohl mit 2 als auch mit 5.

2 kommt 50 Mal vor, aber 5 kommt nur zwölf Mal vor in der Primfaktorenzerlegung.

2)	Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, sodass der Wert von $$P(n) = 1 + n^3 + n^6 + n^9 + n^{12}$$ eine Primzahl ist.

LÖSUNG 1: (Probierphase, Vermutung, erfolgreiche Division)

Setzen wir die drei kleinsten natürlichen Zahlen ein, so erhalten wir:

- $P(0) = 1$ keine Primzahl
- $P(1) = 5$ eine Primzahl!
- $P(2) = 4681 = 31 \cdot 151$ keine Primzahl

Die Vermutung, dass P(1) = 5 die einzige auftretende Primzahl ist, ist nahe liegend. Wenn man eine Zerlegung des Polynoms findet wäre dies zielführend.

Da 1+2+4+8+16 = 31 ist, kann die Vermutung aufkommen, dass $1 + n + n^2 + n^3 + n^4$ ein Teiler von $P(n)$ ist. Führt man die Polynomdivision durch, erhält man in der Tat:

$$P(n) = n^{12} + n^9 + n^6 + n^3 + 1 = (n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) \cdot (n^8 - n^7 + n^5 - n^4 + n^3 - n + 1)$$

Mit dem verallgemeinerten HORNER-Schema ist die Division mit relativ wenig Aufwand durchführbar.

	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
-1	-	-1	1	0	-1	1	-1	0	1	-1	-	-	-
-1	-	-	-1	1	0	-1	1	-1	0	1	-1	-	-
-1	-	-	-	-1	1	0	-1	1	-1	0	1	-1	-
-1	-	-	-	-	-1	1	0	-1	1	-1	0	1	-1
	1	-1	0	1	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0

Für $n = 0$ werden beide Faktoren 1 und man erhält keine Primzahl,
bei $n = 1$ ist der zweite Faktor 1 und der erste 5, sodass trotz Faktorisierung eine Primzahl entsteht.

Für $n \geq 2$ gilt: $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 \geq 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ und
$n^8 - n^7 + n^5 - n^4 + n^3 - n + 1 = (n-1) \cdot (n^7 + n^4) + (n^2 - 1) \cdot n + 1 \geq 1 \cdot (128 + 16) + 3 \cdot 2 + 1 = 151$

Damit ist bewiesen, dass für $n \geq 2$ der Wert $P(n)$ immer zerlegbar ist.

VARIANTE 2: (Andere Faktorisierung der geometrischen Reihe)

Das Polynom ist eine geometrische Reihe mit Quotient $q = n^3$

$$P(n) = n^{12} + n^9 + n^6 + n^3 + 1 = \frac{n^{15} - 1}{n^3 - 1}$$

Wegen 15 = 3·5 können wir den Zähler auch anders faktorisieren:

$$P(n) = \frac{n^{15} - 1}{n^3 - 1} = \frac{(n^5 - 1) \cdot (n^{10} + n^5 + 1)}{(n-1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \frac{(n-1) \cdot (n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) \cdot (n^{10} + n^5 + 1)}{(n-1) \cdot (n^2 + n + 1)}$$

Da $\mathrm{ggT}(1 + n + n^2 + n^3 + n^4, 1 + n + n^2) = \mathrm{ggT}(1 + n, 1 + n + n^2) = \mathrm{ggT}(1 + n, 1) = 1$ gilt, muss wegen der Nennerfreiheit von $P(n)$ gelten, dass $(n^2 + n + 1)$ den Faktor $(n^{10} + n^5 + 1)$ teilt. (Man könnte natürlich auch die Division durchführen – das Ergebnis sieht man in der ersten Lösung.)

Es gilt daher, dass $P(n) = (n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) \cdot \dfrac{(n^{10} + n^5 + 1)}{(n^2 + n + 1)}$, also zerlegbar ist, und für $n \geq 2$ sind beide Faktoren größer als 1.

3) a) Man zeige, dass für alle reellen Zahlen x folgende Ungleichung gilt:

$$10x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 26$$

b) Man zeige, dass für alle reellen Zahlen x auch folgende Ungleichung gilt:

$$18x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 33$$

LÖSUNG 1 von a): (Ergänzen auf vollständige Quadrate)

$$10x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 26 \Leftrightarrow 0 < x^6 - 2x^3 + 1 + x^2 - 10x + 25 = \left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 5\right)^2$$

Da Quadrate nie negativ sind, und das erste Quadrat nur für $x = 1$ und das zweite nur für $x = 5$ verschwindet, ist die Ungleichung bewiesen.

LÖSUNG 2 von a): (Thomas Speckhofer – mithilfe AM-GM-Ungleichung)

- $x^6 + 1 \geq 2\sqrt{x^6} = 2\left|x^3\right| \geq 2x^3$
- $x^2 + 25 \geq 2\sqrt{25x^2} = 10|x| \geq 10x$

Da Gleichheit bei der ersten Ungleichung nur für $x = \pm 1$ gilt, sowie bei der zweiten Ungleichung nur für $x = \pm 5$, ergibt die Addition der beiden die zu beweisende Ungleichung. (Wegen der Abschätzung der Beträge fallen eigentlich die beiden negativen Werte weg.)

Vorbemerkung zu den Lösungen von b): Für $x \leq 0$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

Wir betrachten daher ab nun nur noch positive x.

LÖSUNG 1 von b): (Heinrich J. Gstöttner – vollständige Quadrate abschätzen)

$$18x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 33 \Leftrightarrow 0 < x^6 - 2x^3 + 1 + x^2 - 18x + 32 \Leftrightarrow 49 < \left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 9\right)^2$$

Beide Quadrate sind nicht negativ.

- $x = 2$: $\left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 9\right)^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 > 49$.
- $x > 2$: $\left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 9\right)^2 > \left(2^3 - 1\right)^2 + 0 = 49$ wegen der Monotonie von x^3
- $x < 2$: $\left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 9\right)^2 > 0 + \left(2 - 9\right)^2 = 49$ wegen der Monotonie von $\left(x - 9\right)^2$ in diesem Bereich (Minimum bei 9)

LÖSUNG 2 von b): (Jan Schiller – Trinomzerlegung und Abschätzungen)

$$18x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 33 \Leftrightarrow 0 < x^6 - 2x^3 + 1 + x^2 - 18x + 32 \Leftrightarrow 0 < \left(x^3 - 1\right)^2 + \left(x - 2\right)\cdot\left(x - 16\right)$$

- $x < 2 \vee x > 16$: $\left(x - 2\right)\cdot\left(x - 16\right) > 0$
- $x = 2 \vee x = 16$: $\left(x - 2\right)\cdot\left(x - 16\right) = 0$ und $\left(x^3 - 1\right)^2 > 0$
- $2 < x < 16$ Nun gilt $\left(x - 2\right)\cdot\left(x - 16\right) < 0$. Aber $\left(x^3 - 1\right)^2$ ist groß genug.

Um diesen dritten Fall in den Griff zu bekommen, dividiert Jan durch x^3(>0)und bekommt so brauchbare Abschätzungen:

$$x^6 - 2x^3 + x^2 - 18x + 33 > 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 + \frac{1}{x} - \frac{18}{x^2} + \frac{33}{x} > 0$$

$$x^3 - 2 + \frac{1}{x} - \frac{18}{x^2} + \frac{33}{x} > 8 - 2 + \frac{1}{16} - \frac{18}{4} + 0 > 6 - 4{,}5 = 1{,}5 > 0$$

LÖSUNG 3 von b): (Thomas Speckhofer – gewichtete AM-GM-Ungleichung)

Die Potenz x^6 teilen wir auf, um die Ungleichung in den Griff zu bekommen:

$$18x + 2x^3 < x^6 + x^2 + 33 \Leftrightarrow \frac{x^6}{2} + 2 + \frac{x^6}{2} + x^2 + 31 > 2x^3 + 18x$$

Aus der AM-GM-Ungleichung folgt: $\frac{x^6}{2} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{x^6}{2} \cdot 2} = 2x^3$

Es genügt noch zu zeigen: $\frac{x^6}{2} + x^2 + 31 > 18x$

Thomas beweist die verschärfte Ungleichung $\frac{x^6}{2} + x^2 + 30 \geq 18x$

Da links x in der achten Potenz auftritt, braucht Thomas acht Summanden für die AM-GM-Ungleichung. Dies gelingt durch Aufspalten von 30:

$$\frac{x^6}{2} + x^2 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{x^6}{2} \cdot x^2 \cdot 5^6} = 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{5^6}{2}} \cdot x \overset{?}{\geq} 18x$$

Es bleibt zu zeigen, ob $8 \cdot \sqrt[8]{\frac{5^6}{2}} \geq 18 \Leftrightarrow \sqrt[8]{\frac{5^6}{2}} \geq \frac{9}{4}$

Mit einem Taschenrechner wäre dies sehr einfach zu überprüfen. Thomas schätzt ab:

$$\sqrt[8]{\frac{5^6}{2}} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5^6}{2} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^8 = \left(\frac{81}{16}\right)^4 \Leftrightarrow$$

$$16^4 \cdot 5^6 \geq 2 \cdot 81^4 \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot 80^4 \geq 2 \cdot 81^4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{2} \geq \left(\frac{81}{80}\right)^4$$

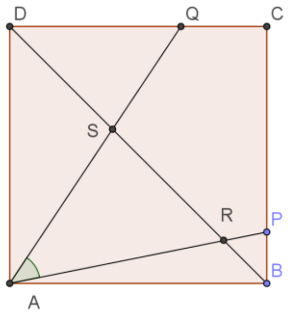
Die letzte Ungleichung ist nun relativ einfach abschätzbar: Zum Beispiel mit $\frac{81}{80} < \frac{3}{2}$

Wir erhalten die grobe Abschätzung: $\left(\frac{81}{80}\right)^4 < \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 2{,}25^2 < 3^2 = 9 < 12{,}5 = \frac{25}{2}$

Addition der beiden Ungleichungen ergibt also die zu beweisende Ungleichung.

4)	Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* und die Punkte *P* auf *BC* und *Q* auf *CD* mit $\sphericalangle PAQ = 45°$. *R* und *S* seien die Schnittpunkte der Diagonale *BD* mit *AP* bzw. *AQ*. Man beweise, dass die fünf Punkte *P*, *Q*, *R*, *S* und *C* auf einem Kreis liegen.

LÖSUNG 1 (Jan Schiller):



Zuerst zeigen wir, dass die Dreiecke *ARS*, *RBP* und *SQD* ähnlich sind.

$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = 45°$, da die Diagonale des Quadrats den rechten Winkel halbiert.

$\sphericalangle BRP = \sphericalangle SRA$ und $\sphericalangle ASR = \sphericalangle QSD$.

Gleichheit von je zwei Winkel ergibt die Ähnlichkeit, wobei $\sphericalangle ASR = \sphericalangle QSD = \sphericalangle RPB$ und $\sphericalangle BRP = \sphericalangle SRA = \sphericalangle DQS$.

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes (Sehne *AB*) müssen die Punkte *A*, *B*, *P* und *S* auf einem Kreis liegen, da $\sphericalangle ASB = \sphericalangle APB$.

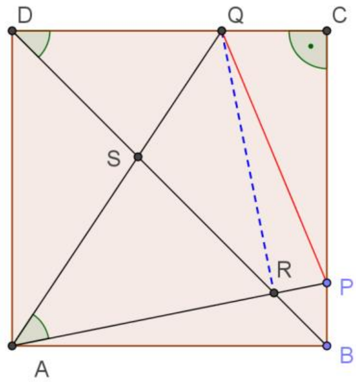
ABPS ist also ein Sehnenviereck. Im Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel auf 180°, daher gilt $\sphericalangle ASP = 90°$. (Dies folgt auch daraus, dass aufgrund des Satzes von Thales *AP* der Durchmesser des Kreises durch die Punkte *A*, *B*, *P* und *S* ist.)

Daraus folgt wiederum, dass $\sphericalangle PSQ = 90°$. Die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle PSQ$ und $\sphericalangle QCP$ ergänzen sich auf 180°, daher ist *CQSP* ein Sehnenviereck.

Analog zur Lösung für den Punkt *S* liegen aufgrund des Peripheriewinkelsatzes *A*, *R*, *Q* und *D* auf einem Kreis ($\sphericalangle QRA = \sphericalangle PRQ = 90°$), also auch *CQRP* ist ein Sehnenviereck

– und der Punkt *R* liegt also auf demselben Kreis wie *C*, *Q* und *P* (und S).

LÖSUNG 2 (Erich Windischbacher)



Wegen des rechten Winkels in *C* muss *PQ* der Durchmesser des gesuchten Kreises sein (Satz von Thales)

Wiederum wegen des Satzes von Thales, genügt es zu zeigen, dass $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PSQ = 90°$.

Wir zeigen, dass *ARQD* ein Sehnenviereck ist:

Da in einem Quadrat die Diagonalen die Winkel halbieren, gilt, dass der Winkel $\sphericalangle BDQ = \sphericalangle RDQ = 45°$.

Laut Angabe gilt $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle RAQ = 45°$.

Wegen des Randwinkelsatzes (Sehne RQ) ist also *ARQD* ein Sehnenviereck, wobei AQ Durchmesser des Umkreises ist (Satz von Thales).

Also gilt $\sphericalangle QRA = \sphericalangle PRQ = 90°$.

Analog beweist man, dass ABPS ein Sehnenviereck ist (RWS über PS) und daher $\sphericalangle PSQ = 90°$.